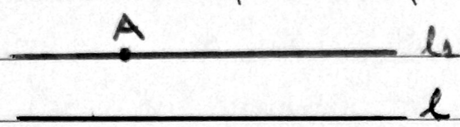
#5ο ΜΑΘΗΜΑ#

6/11/2018.

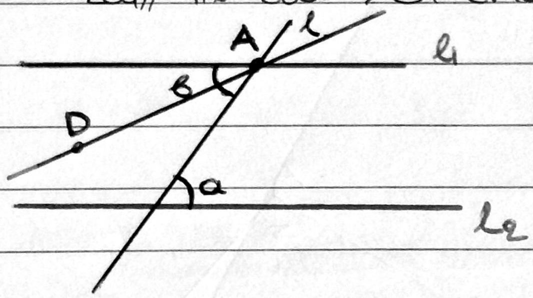
§ ΑΞΙΩΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

$\boxed{1}$ • Ας υποθέσουμε ότι το αξίωμα ισχύει.

• ΑΞΙΩΜΑ: Από σημείο Α, εκτός ευθείας l διέρχεται ακριβώς μία παράλληλη προς την l.



ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω, l_1, l_2: παράλληλες και l: ευθεία η οποία τέμνει και τις δύο. ⇒ Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες



[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: Έστω, γωνίες $\hat{a}, \hat{b}$

• Έστω, $\hat{b} > \hat{a}$

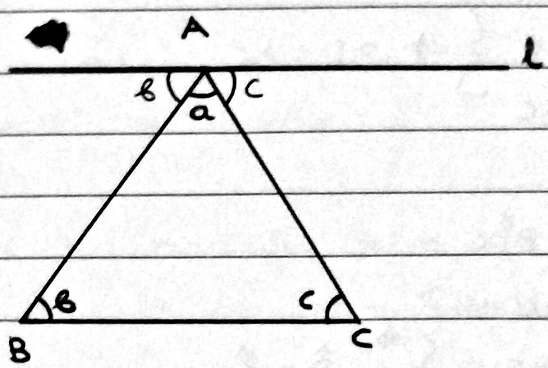
⇒ Το A είναι τομή της l και l_1

• Από το A μπορώ να φέρω ημιευθεία AD ώστε η γωνία που σχηματίζει η AD και l να είναι $\hat{a}$

Τότε, η AD θα πρέπει να 'ναι ∥ με την l_2 ⇒ Άτοπο!

ΘΕΩΡΗΜΑ: Από το αξίωμα της παραλληλίας προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές.

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]:

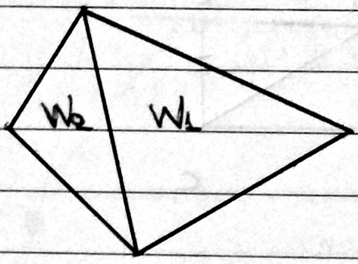


- Από την κορυφή A θεωρώ ευθεία $l \parallel BC$
- Από το προηγούμενο θεώρημα οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.

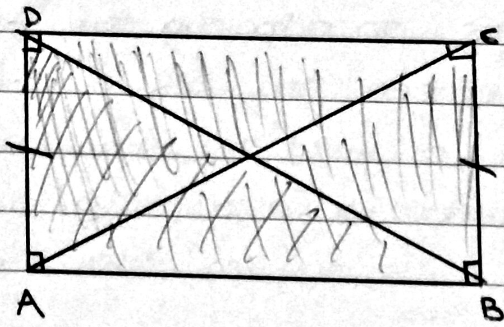
* Άρα, $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=2$ ορθές

ΠΟΡΙΣΜΑ: Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με 4-ορθές (Από αξ. παραλληλίας)

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: $W_1+W_2=4$ ορθές.



ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα τετράπλευρο ABCD λέγεται τετράπλευρο Sacheri αν $AD=BC$ και $\hat{A}=\hat{B}=R$



[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: Ισχυρισμός: $\hat{D} = \hat{C}$

$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ABD}$

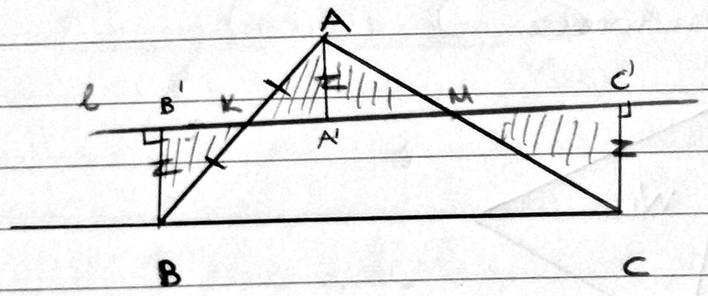
$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow AB: \text{κοινή} \\ \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = R \\ \rightarrow AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow BD = AC$$

$\overset{\triangle}{ADC} = \overset{\triangle}{BDC}$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow DC = \text{κοινή} \\ \rightarrow AD = BC \\ \rightarrow AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C}$$

* Σ' ένα 4-πλευρο Sucheri οι γωνίες $\hat{D}, \hat{C}$: ΙΣΕΣ//

Θεωρώ, ένα τρίγωνο ABC και K μέσο των AB και// M μέσο των AC



* $BB'CC'$: 4-πλευρο sucheri
* ABC: $B'\hat{B}C + B\hat{C}C'$

Ζ→ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ: (i) Αν οι γωνίες στο 4-πλευρο Sucheri είναι οξείες ⇒ το άθροισμα των γωνιών είναι ε μικρότερο από 2R

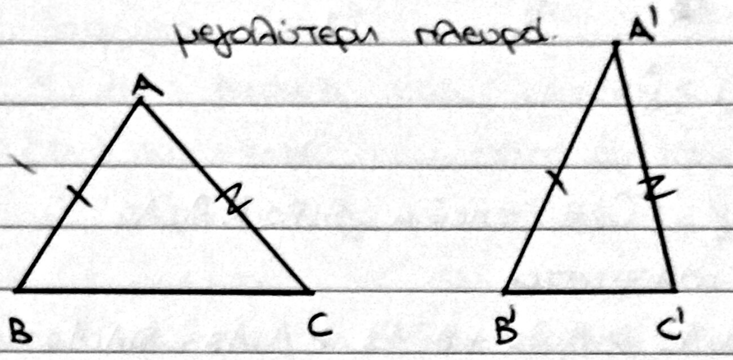
(ii) Αν οι γωνίες του 4-πλευρού Sucheri είναι αμβλείες ⇒ Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι > από 2R

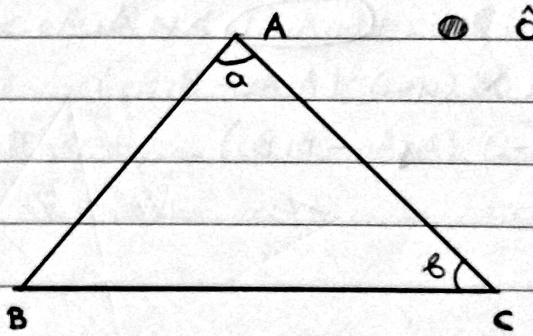
(iii) Αν οι ίσες γωνίες στο 4-πλευρο Saccheri είναι ορθές $\Rightarrow$ το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου $= 2R$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το άθροισμα των γωνιών στην Απόλυτη Γεωμετρία δεν ξεπερνά τις 2 ορθές.

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: ● Για την απόδειξη θα χρειαστώ δύο λήμματα.

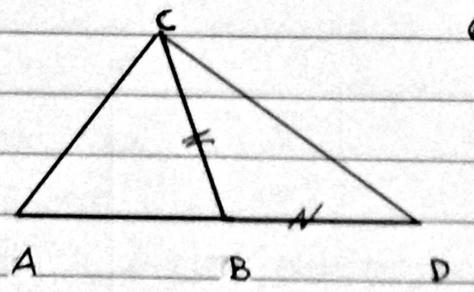
ΛΗΜΜΑ: Έστω, ότι έχω 2 τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ $\Rightarrow$ απέναντι απ' την μεγαλύτερη γωνία έχω την μεγαλύτερη πλευρά.





● $\hat{a} > \hat{b} \Rightarrow BC > AB$

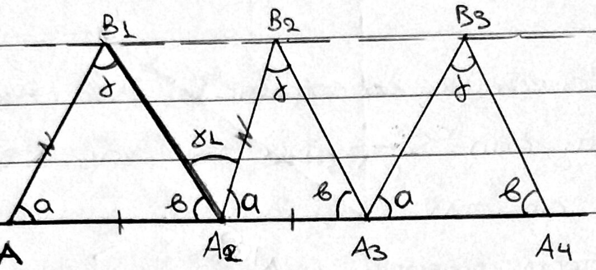
ΛΗΜΜΑ: [ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ] Εάν, $AB\Gamma$ 3-μη συνευθειακά σημεία $\rightarrow AC < AB + BC$



● $AC < AD = AB + BD = AB + BC$

ΛΗΜΜΑ 3: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $2R$

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: Έστω, α, β, γ οι γωνίες του $\overset{\triangle}{ABC}$



Ισχυρισμός: $\hat{\gamma}_1 > \hat{\gamma}$

Έστω, $\gamma_1 < \gamma$. Τότε, επειδή $B_1B_2 < A_1A_2$

Από τριγωνική ανισότητα

$$A_1B_1 + B_1B_2 + B_2A_3 > A_1B_2 + B_2A_3 > A_1A_3 = 2A_1A_2$$

$$\Rightarrow A_1B_1 + B_1B_2 + B_2A_3 > 2A_1A_2$$

$$\Rightarrow \quad A_1B_1 + (n-1)B_1B_2 + \overset{B_1A_2}{\overset{\shortparallel}{B_nA_{n+1}}} > nA_1A_2 > (n-1)A_1A_2$$

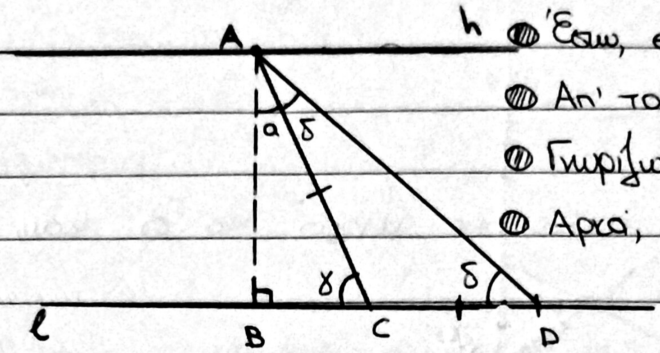
$$\Rightarrow \quad A_1B_1 + B_1A_2 > (n-1)(A_1A_2 - B_1B_2)$$

$$\Rightarrow A_1B_1 + B_1A_2 > (n-1)(A_1A_2 - B_1B_2), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άτοπο!

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν, το άθροισμα των γωνιών $\forall$ τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές $\Rightarrow$ Ισχύει, το αξίωμα της παραλληλίας

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]:



- Έστω, ευθεία l και $A \notin l$
- Απ' το A φέρω $\perp$ AB
- Γνωρίζω, ότι $h \parallel l$
- Άρα, ν.δ.ο h = ΜΟΝΑΔΙΚΗ

- Επιλέγω, ένα σημείο C στην l.
- D: Σημείο : $B*C*D$ και $CD = AC$
- $A\hat{C}D$: ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ και από υπόθεση όλα τα τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών 2R

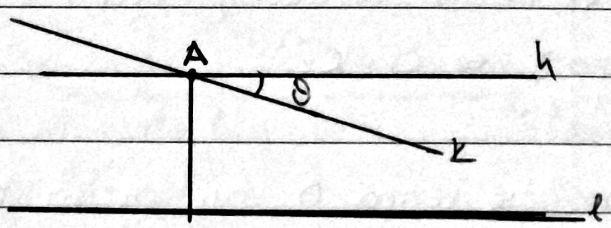
- Επαναλαμβάνω, τη διαδικασία και θεωρώ $D_1 : B*D*D_1$ και $DD_1 = AD$

$\delta_1 = \frac{\gamma}{4}$

- ΓΕΝΙΚΑ: $\delta_i = \frac{\gamma}{2^{i+1}}$ και $\phi_i = \frac{\gamma}{2^{i+1}}$

- Έστω, ότι $\exists$ ευθεία $k \neq h$ η οποία $\parallel$ προς την l.

- $k \neq l$ η γωνία θ μεταξύ τους είναι μη-μηδενική



- $\exists$ σημείο D_{io} : $\hat{A}D_{io}$ με την h να είναι $\frac{\theta}{2} < \theta$

Αυτό σημαίνει